Example of the mdbch fonts.

Paul Pichaureau

29 janvier 2006

Résumé

The package mdbch consists of a full set of mathematical fonts, designed to be combined with bitstream charter as the main text font.

This example is extracted from the excellent book *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, W. Appel, Paris, éd. H.& K., 1999.

1 Dérivation de la transformée de Fourier

On a la relation très importante entre T.F. et dérivation :

Théorème 10.22 **Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction décroissant suffisamment vite pour que $x \mapsto x^k f(x)$ soit également dans $L^1(\mathbb{R})$ pour $k = 0, \dots, n$. Alors $\widetilde{f}$ est n fois dérivable et on a**

$$\mathscr{F}\left((-2\mathrm{i}\pi x)^k f(x)\right) = \widetilde{f}^{(k)}(\nu) \qquad \text{pour } k = 1, \dots, n.$$

Inversement, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, si f est de classe $\mathscr{C}^n$ et si, de plus, les dérivées successives $f^{(k)}$ sont intégrables pour $k = 1, \dots, n$, alors on a

$$\mathscr{F}\left(f^{(m)}(x)\right) = (2\mathrm{i}\pi\nu)^m \widetilde{f}(\nu) \qquad \text{pour } k = 1, \dots, n.$$

Notamment, on retiendra que :

$$\boxed{\mathscr{F}\left(f'(x)\right) = 2\mathrm{i}\pi\nu \widetilde{f}(\nu) \quad \text{et} \quad \mathscr{F}\left(-2\mathrm{i}\pi x f(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\widetilde{f}(\nu).}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\nu \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, de dérivée k-ième bornée en module par $\left|(2\pi x)^k f(x)\right|$, qui est intégrable. On applique alors le théorème de dérivation sous le signe somme, qui nous donne

$$\widetilde{f}'(\nu) = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left[f(x)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\nu x}\right]\mathrm{d}x = \int (-2\mathrm{i}\pi x) f(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu x}\,\mathrm{d}x$$

puis, par une récurrence immédiate, la première formule.

On rappelle que pour toute fonction intégrable ϕ, on a

$$\int \phi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\mathrm{R}\to+\infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \phi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Puisque f' est intégrable, on a donc

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left(f'\right)(\nu) &= \lim_{\mathrm{R}\to+\infty} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} f'(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\mathrm{R}\to+\infty} \left\{ \left[f'(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu x}\right]_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} + \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} (2\mathrm{i}\pi\nu x)\,f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu x}\,\mathrm{d}x \right\}.\end{aligned}$$

Comme f est sommable *ainsi que sa dérivée*, f admet une limite nulle en $\pm\infty$. La formule précédente nous montre alors, en faisant tendre R vers l'infini, que

$$\int f'(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu x}\,\mathrm{d}x = \int (-2\mathrm{i}\nu x)\,f(x)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\nu x}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui nous montre la deuxième formule pour $k = 1$. Une récurrence sur k permet de conclure.

Walter Appel, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*